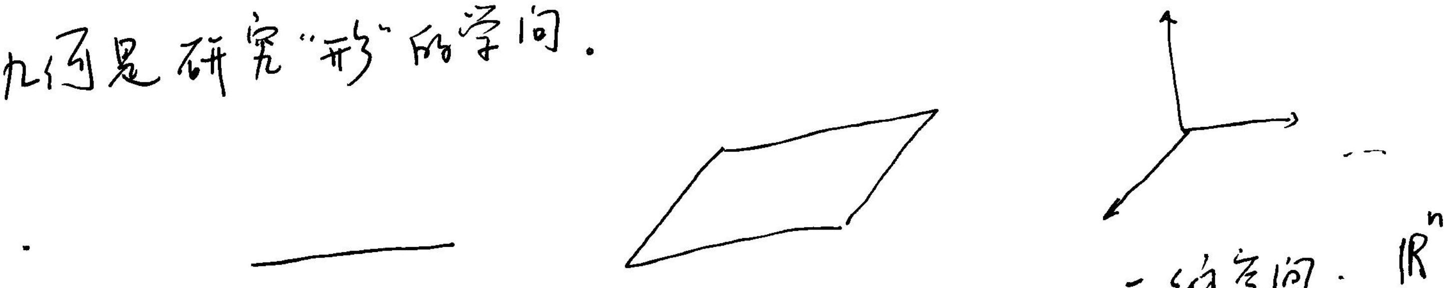
导言

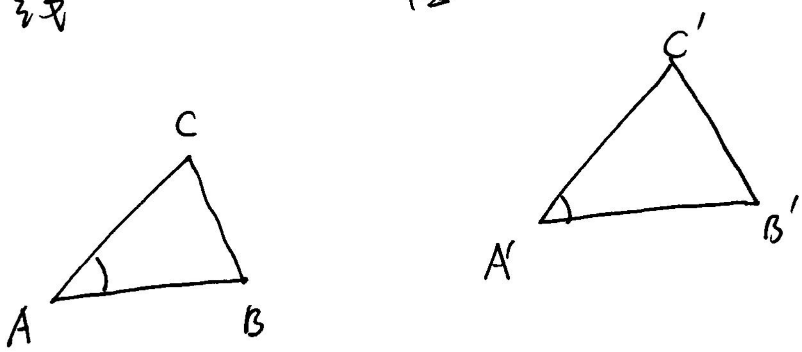
什么是几何？

几何是研究"形"的学问.



点　　　线　　　面　　　三维空间. $\mathbb{R}^n$

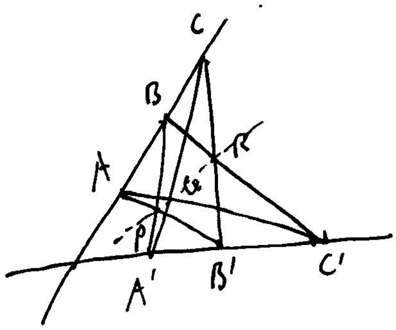
平面几何:



例: (边角边定理)

两个三角形"全等" ⟺ 有一个角其角度相等 + 其相邻边边长相等

例 (帕斯卡定理)



平面几何的公理: (1) 过平面中两点有且只有一条直线

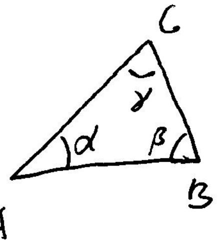
(2) ~~给定平面中~~ 过直线外一点有且只有一条平行线.

(即该线与直线无相交

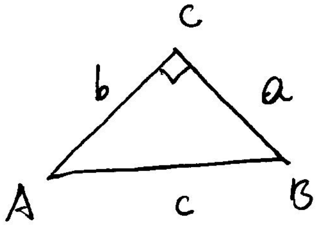
公理(2) 称为平行公理

∀任意 $\triangle ABC$,

$\Longleftrightarrow \angle\alpha+\angle\beta+\angle\gamma=$ 常数 $\left(\pi / 180^\circ\right)$



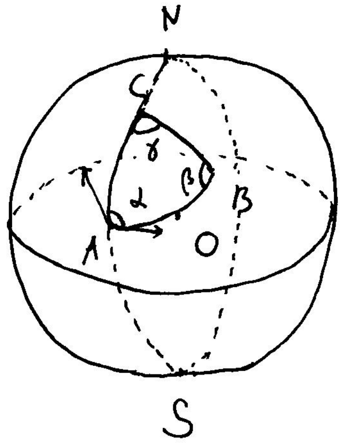
$\Longleftrightarrow$ 勾股定理



推论: 过两点直线(段)是最短.

$a^2+b^2=c^2$

考察:



什么是直线? 过两点确定的大圆弧, 因为距离最短.

~~> "测地线" (geodesic)

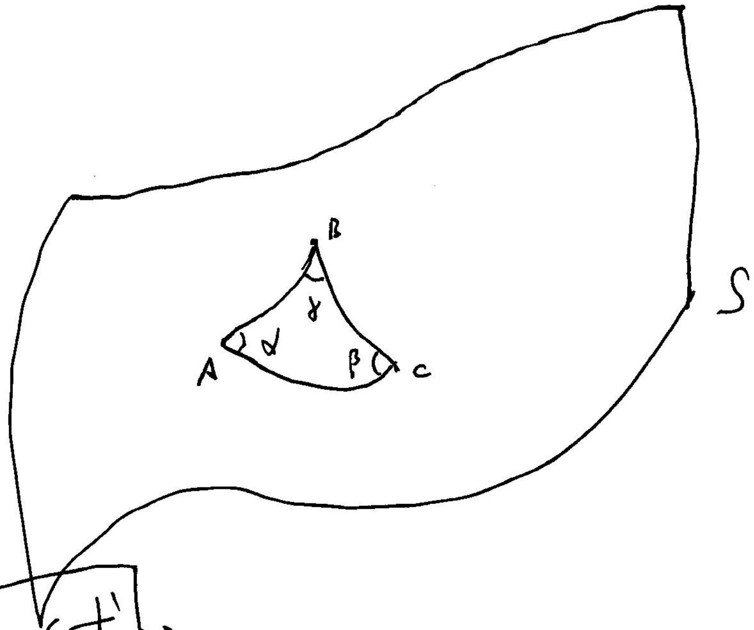
什么是角度? 过切点 P 的两大圆弧的切线的夹角.

Gauss-Bonnet 公式: $\angle\alpha+\angle\beta+\angle\gamma-\pi$ (≠常数)

$=\triangle ABC$ 的面积.

特别:

一般论：



$\boxed{\text{Gauß-Bonnet 公式}}$：

$S \subset \mathbb{R}^3$ 曲面（片 = 局部曲面）

$$\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma - \pi = \iint_{\Delta ABC} K\, dA$$

K = 高斯曲率

平面对应于 $K \equiv 0$，球面对应于 $K \equiv 1$.

平面几何/立体几何 $\xrightarrow[\text{弯曲的线与面 平面或 } \mathbb{R}^3 \text{ 中}]{\text{用微积分研究}}$ 微分几何 $\xrightarrow[\text{高维}]{\text{度量→联络→曲率}}$ 黎曼几何 / 辛几何

射影几何 $\xrightarrow[\text{二维射影平面中的线；三维射影空间中的线与面}]{\text{用近世代数研究}}$ 代数曲线与曲面 $\xrightarrow[\text{高维}]{\text{层 上同调}}$ 代数几何

Ref: K. Ueno. 射影几何与代数几何

还有:

拓扑几何学 = 橡皮条几何学 = 研究在连续变换下的几何不变量.

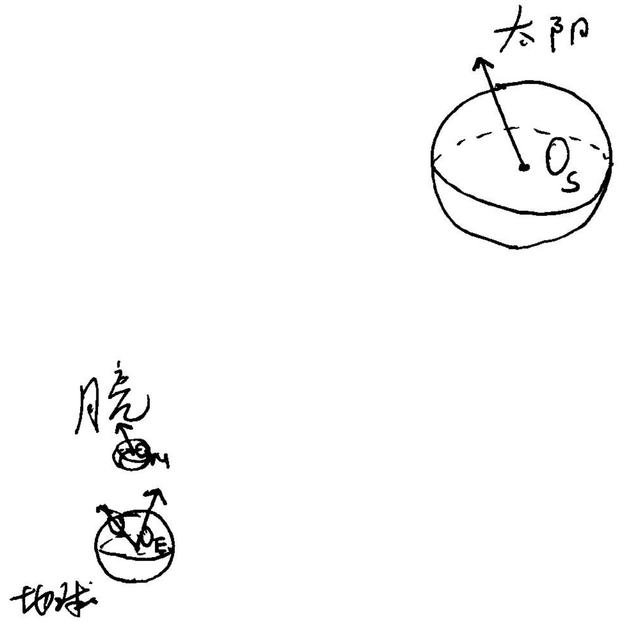
分形几何学 = 研究自相似结构的几何

辛几何学 =

⋮

它们均来自于自然。

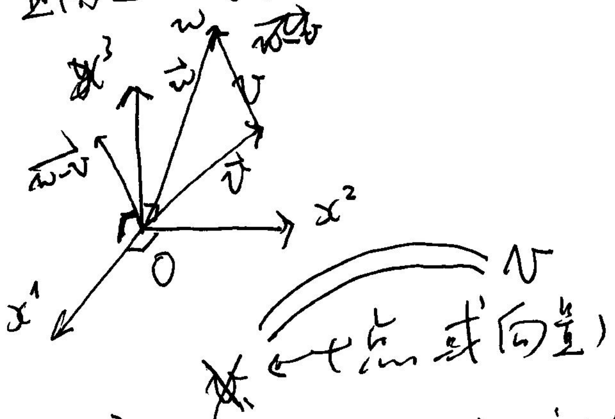
1. 我们的空间与等距运动/变换。



描述它们，及它们的运动．（这个问题相当深刻，也说明了我们是相当高一级的生物）

(1) 描述它们．

直角坐标系．



$$\mathbb{R}^3 = \{(x^1, x^2, x^3) \mid x^i \in \mathbb{R}\}$$

标准基： $e_1 = (1,0,0)$， $e_2 = (0,1,0)$， $e_3 = (0,0,1)$

$$v = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 = \sum_{i=1}^{3} x^i e_i$$

距离：（~~距离~~定义，等距离变换）

$\cancel{x} = (x^1, x^2, x^3)$，　$\cancel{y} = (y^1, y^2, y^3)$
$\quad v \qquad\qquad\qquad\qquad w$

~~从点~~
从点~~v~~到点~~w~~的距离定义为

$$d(v,w) \triangleq \sqrt{(y^1-x^1)^2 + (y^2-x^2)^2 + (y^3-x^3)^2}$$

标准内积：

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\langle\, ,\, \rangle_s} \mathbb{R}$$

$$(\vec{v}, \vec{w}) \longmapsto \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_s \triangleq x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$$

$$= \sum_{i=1}^{3} x^i y^i$$

则有等式

$$d(v,w) = \langle \vec{v-w}, \vec{v-w} \rangle_s^{1/2} = \| \vec{v-w} \|$$

「回忆：内积

上有限
V 是 $\mathbb{R}$-维线性空间

$$V \times V \xrightarrow{\langle\, ,\, \rangle} \mathbb{R}, \quad \text{~~双线性~~} \qquad \text{双线性性}$$

(1) $\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle$.

(2) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ 　　对称性

(3) $\underset{\|v\|^2}{\underset{\shortparallel}{\langle v, v \rangle}} \geq 0$，且 $= 0 \Leftrightarrow v = 0$. 　　正定性

正定双线性型 ⟶ 范数 ⟶ 距离.」

垂直：$\vec{v} \perp \vec{w} \triangleq \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$，更一般角度 $\cos(\angle vow) = \dfrac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$

注意到 $\mathbb{R}^3$ 上 标准内积下：有

$* \left(\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1, \quad e_1, e_2, e_3 \text{ 互相垂直} \right)$

习题：内积完全由范数确定（i.e. $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \right)$）

故前面条件是本质的.

回忆：$(V, \langle , \rangle)$，V 是 $\mathbb{R}$ 上~~有限维~~线性空间. n-维

$\langle , \rangle$ 是内积

基 $\{e_1', \dots, e_n'\}$ 称为标准正交基（~~Normalized~~ orthnormal basis）

如果 $\langle e_i', e_j' \rangle = \delta_{ij}$, $\forall i, j$.

显然 标准正交基不是唯一的.

习题：~~考察~~ $(\mathbb{R}^3, \langle\ \rangle_s)$ 中所有标准正交基.

令 $\{e_1' = (x^1, x^2, x^3),\ e_2' = (y^1, y^2, y^3),\ e_3' = (z^1, z^2, z^3)\}$

为 $\mathbb{R}^3$ 中三向量.

记 $E' = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{pmatrix}$. 则

$\{e_1', e_2', e_3'\}$ 为标准正交基 $\Leftrightarrow E'(E')^T = I_3$

i.e. $E' \in O(3)$

~~[illegible] 那么 标准正交~~

$G = O(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ （三维欧氏等距变换群）

$(E_1, v_1)\cdot(E_2, v_2) \triangleq (E_1\cdot E_2,\ v_1 + v_2\cdot E_1)$

$e = (I_3, 0)$，半直积.

习题：验证 $(G,\cdot)$ 是群，计算 $(E,v)^{-1}$.

$X = \mathfrak{F}$，$G \times \mathfrak{F} \xrightarrow{\Phi} \mathfrak{F}$

$\big((E,v),\ (X; e_1, e_2, e_3)\big) \longmapsto (X\cdot E + v;\ e_1\cdot E,\ e_2 E,\ e_3\cdot E)$

习题：(1) 验证 Φ 是~~一个作用，~~一个简单可传递的作用.

$$\mathfrak{F} = G\cdot\big(0; (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$$

(2) 验证：

$$\begin{tikzcd} G\times\mathfrak{F} \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\times \mathrm{pr}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathfrak{F} \arrow[d, "\mathrm{pr}"] \\ G\times\mathbb{R}^3 \arrow[r, "\Psi"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$\mathrm{pr}: \mathfrak{F} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\{X; e_1, e_2, e_3\} \longmapsto X$，

$\Psi: G\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\big((E,v), X\big) \longmapsto X\cdot E + v$

群是一个抽象的概念. 我们知道它存在是因为我们观察到了它在空间上的作用/表示.

定义: 令 $F = (y^1(x^1,x^2,x^3),\ y^2(x^1,x^2,x^3),\ y^3(x^1,x^2,x^3))$

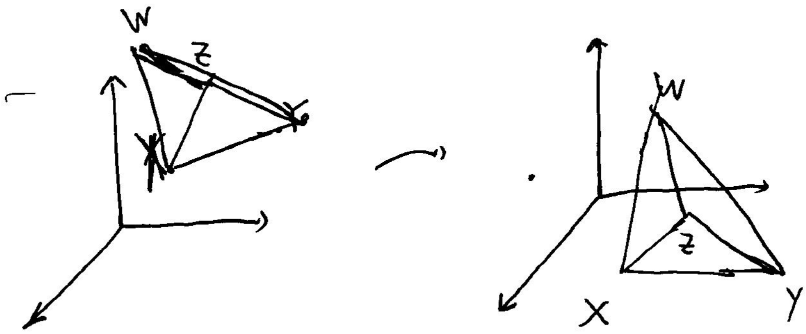
$$: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x^1,x^2,x^3) \longmapsto (y^1,y^2,y^3)$$

为 C^∞ 可微双射 (= 坐标变换)

F 称为等距变换, 如果满足

$$d(F(X),F(Y)) = d(X,Y), \quad \forall X,Y \in \mathbb{R}^3.$$



定理: 三维欧氏等距变换群 $= O(3) \ltimes \mathbb{R}^3$.

证明: 显然 $O(3) \ltimes \mathbb{R}^3 \subseteq$ 三维欧氏等距变换群.

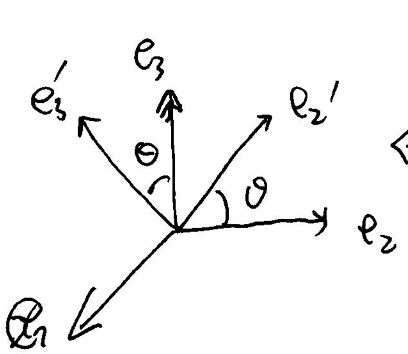
任取 设 $\tilde{T}(0) = P$. 则考虑 $T^0 = (Id, -P)\circ\tilde{T}$

则 $T^0(0) = (Id,-P)\circ\tilde{T}(0) = (Id,-P)(P) = 0.$

关键点: 证明 T^0 是线性的. 即 $dT^0|_0 =$ 常矩阵.

$\mathrm{Jac}(T)$

* 表明 标准基是一组规范正交基，其对应矩阵为 I_3.



$$\longleftrightarrow \quad E' = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow e_1' = e_1 \\ \leftarrow e_2' = \cos\theta\, e_2 + \sin\theta\, e_3 \\ \leftarrow e_3' = -\sin\theta\, e_2 + \cos\theta\, e_3 \end{array}$$

$\boxed{\text{注意}}$：我们空间中并没有一个特别的点作为原点，也没有一个特别的规范正交基作为标准基。

故我们需要引入

定义：三维欧氏空间中的正交标架是指 $\mathbb{R}^3$ 中的一个点 X，及以 X 为原点的三个两两正交单位向量 e_1, e_2, e_3，记为

$$\{X;\ e_1, e_2, e_3\}.$$

习题：记 $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^3, \langle\, ,\rangle_s)$ 中的所有正交标架，则有自然双射

$$\mathcal{F} = O(3) \times \mathbb{R}^3$$

$\boxed{\text{注意}}$：我们描述的物理对象的描述表达式依赖于我们正交标架的选取，但是其物理定律（及其运动轨迹）不能依赖于正交标架的选取。

回忆：群在集合（空间）上的作用：

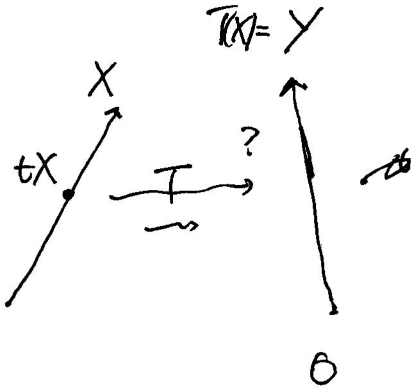
$$G \times X \xrightarrow{\Phi} X \qquad \text{满足} \begin{cases} (1) & e \cdot x = x \\ (2) & g_1(g_2 x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x \end{cases}$$

$$(g,\ x) \longmapsto g \cdot x$$

$$\cancel{d}T' = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

引理: 任取 $X \in R^3$, 及 $t \in (0,1)$

$\overset{\parallel}{0}$



$Y \triangleq T(X)$. 则

$$\begin{array}{ccc} d(O, tX) & = & d(T(O), T(tX)) \\ + & & + \\ d(tX, X) & & d(T(tX), T(X)) \\ \parallel & & \parallel \\ d(O, X) & = & d(O, Y) \end{array}$$

$\boxed{\text{两边之和大于第三边}}$ $\Rightarrow T(tX) \in \overline{OY}$ 即 $\exists \overset{s(t)}{\overset{\parallel}{s}} \in (0,1)$, s.t

$$T(tX) = s \cdot Y$$

两边对t求导 $\Longrightarrow X \cdot T'(tX) = s' \cdot T(X)$

令 $t \to 0$

$\Longrightarrow X \cdot T'(0) = s' \cdot T(X)$

$\Rightarrow s' = \text{常数} \xrightarrow{s(0)=0} s = \lambda \cdot t \xrightarrow{\text{令}t\to 1} T(tX) = \lambda \cdot tT$

$\downarrow$

$\Rightarrow \cancel{\lambda} T(X) = \lambda \cdot T($

故 $T(tX) = tT(X)$, $\forall X \in \mathbb{R}^3$

$\forall t \in [0,1]$.

$t>1$

$T(tX) = T\left(\frac{t}{n}\cdot(nX)\right)$

$= \frac{t}{n} T(nX)$

两边对 x^1 求偏导.

$\Longrightarrow$ $(t,0,0)\cdot T'(tX) = t\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}, \frac{\partial y^2}{\partial x^1}, \frac{\partial y^3}{\partial x^1}\right)$

$\parallel$

$t\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}(tX), \frac{\partial y^2}{\partial x^1}(tX), \frac{\partial y^3}{\partial x^1}(tX)\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}(X), \frac{\partial y^2}{\partial x^1}(X), \frac{\partial y^3}{\partial x^1}(X)\right) = \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}(tX), \frac{\partial y^2}{\partial x^1}(tX), \frac{\partial y^3}{\partial x^1}(tX)\right)$

$\stackrel{令\ t=0}{=} \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}(0), \frac{\partial y^2}{\partial x^1}(0), \frac{\partial y^3}{\partial x^2}(0)\right)$

同理. 得 $T'(X) = T'(0)$.

#

附 X 集合. $d: X\times X \to \mathbb{R}$ 是距离函数

(i) $d(P,Q) = d(Q,P)$

(2) $d(P,Q) \geqslant 0$, $= 0 \Leftrightarrow P=Q$.

(3) $d(P,R) \leq d(P,Q)+d(Q,R)$

$\forall P,Q,R \in X$.

习题: 验证: $d(P,Q) = \begin{cases} 1, & P\neq Q \\ 0, & P=Q \end{cases}$ 是距离函数

$(X, d_X) \xrightarrow{f} (Y, d_Y)$ 等距映射，若

$$d_Y(f(P), f(Q)) = d_X(P, Q), \quad \forall P, Q \in X$$

例：$\forall X, Y \subset \mathbb{R}^3$, $d_X \triangleq d|_X$, $\cancel{d_Y \triangleq d|_Y}$.

$T \in O(3) \ltimes \mathbb{R}^3$, $Y \triangleq T(X)$

则 $(X, d_X) \xrightarrow{T|_X} (Y, d_Y)$ 是等距双射.

若 $Y = X$，则是等距自同构.

习题：$X = U \subset \mathbb{R}^3$ 开集. $T_U : (U, d_U) \to (U, d_U)$ 等距变换

则 $\exists T \in O(3) \ltimes \mathbb{R}^3$, s.t. $T_U = T|_U$

问题：$X = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 曲线. $T_X : (S^2, d_{S^2}) \to (S^2, d_{S^2})$

$\nexists T \in O(3) \ltimes \mathbb{R}^3$, s.t. $T_X = T|_X$.